

Шпаргалка: 70+ баллов за 8 тем из 19

Профильная математика ЕГЭ. Формулы, алгоритмы решения и типичные ловушки.

8

тем

19

ПБ

70

ТБ

ТЯЖЕЛОВЕСЫ -- 14 ПЕРВИЧНЫХ БАЛЛОВ

4

ПБ

Параметры

Задание №18 -- часть 2

Графический метод (работает в 80% вариантов)

- 1 Перепиши уравнение в виде $f(x) = g(x, a)$, где a -- параметр
- 2 Построй семейство графиков: фиксируй x , двигай a (или наоборот)
- 3 Найди критические значения a , при которых число решений меняется
- 4 Выпиши ответ по участкам: при каких a сколько решений

Ключевые графики

$|x - a| + |y - b| = r$ -- ромб с центром (a, b)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ -- окружность

$y = a \cdot x + b$ -- пучок прямых

$y = |f(x)|$ -- отражение вверх

$|y| = f(x)$ -- симметрия отн. Ox

Приём: если в задаче $|x - a|$, замени $t = x - a$. Часто задача резко упрощается.

Ловушка: не забудь ОДЗ после замены. \sqrt{x} значит $x \geq 0$.

Метод "Оценка + Пример"

1 **Оценка:** докажи границу (неравенства, делимость, чётность)

2 **Пример:** предъяви конкретные числа, достигающие границы

Инструменты делимости**Признаки делимости:**

на 3: сумма цифр делится на 3

на 4: последние 2 цифры делятся на 4

на 9: сумма цифр делится на 9

на 11: знакочередующаяся сумма цифр

Остатки (мод. арифметика):

$$(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$(a*b) \bmod n = ((a \bmod n) * (b \bmod n)) \bmod n$$

$$a^2 \bmod 4 = \text{только } 0 \text{ или } 1$$

$$a^2 \bmod 3 = \text{только } 0 \text{ или } 1$$

НОД и НОК:

$$a * b = \text{НОД}(a, b) * \text{НОК}(a, b)$$

$$\text{НОД}(a, a+k) = \text{НОД}(a, k)$$

Чётность: нечётная сумма = нечётное число нечётных слагаемых. Сразу ограничивает перебор.

Ловушка: "докажи, что невозможно" -- ищи инвариант: величину, которая сохраняется, но отличается в начале и конце.

4

ПБ

Стереометрия

Задания №3 + №14

Формулы объёмов

Призма: $V = S_{\text{осн}} * h$
Пирамида: $V = (1/3) * S_{\text{осн}} * h$
Цилиндр: $V = \pi * r^2 * h$
Конус: $V = (1/3) * \pi * r^2 * h$
Шар: $V = (4/3) * \pi * r^3$
Усечённая пир.: $V = (h/3)(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1*S_2})$

Координатный метод для №14

- 1 Начало координат -- в вершину с тремя перпенд. рёбрами
- 2 Координаты всех точек. Вектора: $AB = B - A$
- 3 Нормаль к плоскости: $n = [AB \times AC]$
- 4 Расстояние от точки до плоскости: $d = |n * AM| / |n|$

Векторное произведение:

$$[a \times b] = (a_2*b_3 - a_3*b_2, a_3*b_1 - a_1*b_3, a_1*b_2 - a_2*b_1)$$

Скалярное: $a*b = a_1*b_1 + a_2*b_2 + a_3*b_3$

Угол м/у прямыми: $\cos a = |AB*CD| / (|AB|*|CD|)$

Угол м/у плоскостями: $\cos a = |n_1*n_2| / (|n_1|*|n_2|)$

Лайфхак: в правильных призмах/пирамидах начало координат -- в вершину основания, оси вдоль рёбер.

Формулы

Основное: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Двойной угол:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

Формулы приведения (правило):

$\pi/2 \pm x$: функция меняется ($\sin \leftrightarrow \cos$)

$\pi \pm x$: функция НЕ меняется. Знак -- по четверти

Сумма в произведение:

$$\sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin((a+b)/2)\sin((a-b)/2)$$

Общие решения:

$$\sin(x) = a \Rightarrow x = (-1)^n * \arcsin(a) + \pi*n$$

$$\cos(x) = a \Rightarrow x = \pm \arccos(a) + 2*\pi*n$$

$$\operatorname{tg}(x) = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(a) + \pi*n$$

Отбор корней (пункт б)

1 Реши уравнение: $x = \dots + \pi*n$

2 Подставь границы: $a \leq \text{выражение}(n) \leq b$

3 Найди целые n из неравенства

4 Подставь n обратно, выпиши x

Приём: рисуй единичную окружность. Отмечай дугу промежутка, считай точки -- быстрее алгебры.

Ловушка: деление на $\cos(x)/\sin(x)$ теряет корни. Лучше выноси за скобку.

Метод интервалов

- 1 Перенеси всё в одну сторону: $f(x) \geq 0$
- 2 Найди ОДЗ (основания > 0 и $\neq 1$, подлогарифменные > 0)
- 3 Разложи на множители или замени переменную
- 4 Нули множителей на числовую прямую, определи знаки
- 5 Ответ = пересечение с ОДЗ

Свойства логарифмов**Базовые:**

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^k) = k * \log_a(x)$$

Замена основания:

$$\log_a(b) = \ln(b)/\ln(a) = 1/\log_b(a)$$

Монотонность (ключ!):

$$a > 1: \quad \log_a(f) > \log_a(g) \iff f > g > 0$$

$$0 < a < 1: \quad \log_a(f) > \log_a(g) \iff 0 < f < g$$

^^ При основании < 1 знак МЕНЯЕТСЯ

Ловушка: переменное основание -- разбивай на 2 случая: основание > 1 и $0 < \text{основание} < 1$.

1
ПБ

Планиметрия

Задание №1 -- часть 1

Формулы площадей

Треугольник:

$$S = (1/2) * a * h$$

$$S = (1/2) * a * b * \sin(C)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{-- Герон, } p = (a+b+c)/2$$

$$S = abc / (4R) \quad \text{-- через описанную окр.}$$

$$S = p * r \quad \text{-- через вписанную окр.}$$

Трапеция: $S = (a+b)/2 * h$

Параллелограмм: $S = a * h = a * b * \sin(A)$

Окружности

Вписанная: $r = S/p$. Касательные от одной точки равны.**Описанная:** $R = a / (2 * \sin A)$. Теорема синусов.

Вписанный угол = 1/2 центрального.

Угол на диаметр = 90 градусов.

Приём: видишь окружность -- ищи вписанные углы и равные касательные.**1**
ПБ

Уравнения

Задание №6 -- часть 1

Квадратное: $ax^2 + bx + c = 0$

$$D = b^2 - 4ac, \quad x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$$

$$\text{Виет: } x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 * x_2 = c/a$$

Дробно-рациональное:

1. ОДЗ (знаменатель $\neq 0$)
2. Умножь на общий знаменатель
3. Реши, проверь корни по ОДЗ

Иррациональное:

1. Изолируй корень: $\sqrt{f} = g$
2. Условия: $g \geq 0, f \geq 0$
3. Возведи в квадрат, реши
4. ПРОВЕРЬ каждый корень подстановкой

Ловушка: возведение в квадрат даёт посторонние корни. Всегда проверяй.

1
ПБ

Производная

Задание №8 -- часть 1

Таблица производных

$$\begin{array}{ll} (x^n)' = n \cdot x^{n-1} & (\sin x)' = \cos x \\ (\cos x)' = -\sin x & (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2(x) \\ (e^x)' = e^x & (a^x)' = a^x \cdot \ln a \\ (\ln x)' = 1/x & (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x}) \end{array}$$

Правила:

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = (f'g - fg') / g^2$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{-- цепное}$$

Наибольшее / наименьшее на отрезке

- 1 Найди $f'(x)$, реши $f'(x) = 0$
- 2 Вычисли f в критических точках и на концах $[a, b]$
- 3 Выбери \max/\min из полученных значений

$f'(x) > 0$ -- растёт. $f'(x) < 0$ -- убывает. Смена знака f' = экстремум.

Не забудь концы! Наибольшее часто достигается на краю отрезка, а не в критической точке.

Итого: 19 ПБ = 70 ТБ

Этих 8 тем достаточно для 70+ баллов по профильной математике