



Свойства логарифмов

$\log_a b = c$ равносильно $a^c = b$, причём $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ — из этого определения выводятся все свойства логарифмов. В профильной математике они нужны минимум в трёх номерах: простейшее уравнение в задании 7, вычисление в задании 8 и неравенство в задании 16. Внутри — формулы с примерами, разбор уравнений и неравенств, ловушки ОДЗ.



Алгебра

Математика профиль

Задание 7, 8, 16

Обновлено 22 сентября 2026

В каких заданиях ЕГЭ встречаются логарифмы?

По проекту спецификации ЕГЭ 2027 профильная математика — это 20 заданий, 235 минут и 33 первичных балла. Логарифмы проверяют как минимум в трёх номерах. Задание 7 — простейшее уравнение базового уровня, один балл: логарифмическое уравнение здесь один из стандартных типов. Задание 8 — вычисление значения выражения со степенями и логарифмами, тоже базовое и на один балл. Задание 16 — неравенство повышенного уровня с развёрнутым решением, до двух баллов, и в демоверсии это как раз логарифмическое неравенство.

По кодификатору ФИПИ логарифмическая функция относится и к заданию 12 (графики функций), а логарифмические уравнения — к заданию 14, хотя отдельно логарифмам эти номера не посвящены.

Проект спецификации 2027 года обсуждается до 30 сентября 2026 года, нумерация ещё может уточниться. Сами формулы от этого не меняются.

Определение и область допустимых значений

Формула	Условия	Пример с вычислением
$\log_a b = c$ равносильно $a^c = b$	$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$	$\log_3 81 = 4$, потому что $3^4 = 81$
$\log_a b$ может быть отрицательным	b между 0 и 1 при $a > 1$	$\log_2 (1/8) = -3$, потому что $2^{-3} = 1/8$
$\lg b$ — десятичный логарифм, основание 10	$b > 0$	$\lg 0,001 = -3$, потому что $10^{-3} = 0,001$
$\ln b$ — натуральный логарифм, основание e	$b > 0$	$\ln e^2 = 2$
$\log_a f(x)$ существует	$f(x) > 0$	$\log_3 (x - 2)$ определён при $x > 2$
$\log$ по основанию $g(x)$ от $f(x)$ существует	$f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$	$\log_x (6 - x)$ определён при x из $(0; 1)$ и $(1; 6)$

Логарифм — это показатель степени, в которую возводят основание, чтобы получить число. Отсюда три ограничения: отрицательное основание не годится, единица в любой степени даёт единицу, а положительное основание — только положительные числа.

Основное логарифмическое тождество

Формула	Условия	Пример с вычислением
---------	---------	----------------------

Формула	Условия	Пример с вычислением
a в степени $\log_a b$ равно b	$a > 0, a \neq 1, b > 0$	5 в степени $\log_5 7$ равно 7
$\log_a a^c = c$	$a > 0, a \neq 1, c$ — любое число	$\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$
$a^{(c + \log_a b)} = a^c \cdot b$	те же	$2^{(3 + \log_2 5)} = 2^3 \cdot 5 = 40$
(a^k) в степени $\log_a b$ равно b^k	те же	$9^{(\log_3 4)} = 3^{(2 \cdot \log_3 4)} = 4^2 = 16$

В задании 8 тождество работает, когда основание степени и основание логарифма совпадают или приводятся к одному числу, как в последней строке: $9 = 3^2$.

Логарифм произведения, частного и степени

Формула	Условия	Пример с вычислением
$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	$x > 0, y > 0$	$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$
$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$	$x > 0, y > 0$	$\log_2 56 - \log_2 7 = \log_2 8 = 3$
$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$	$x > 0, k$ — любое число	$\log_2 8^5 = 5 \cdot \log_2 8 = 5 \cdot 3 = 15$
$\log_a \sqrt{x} = (1/2) \cdot \log_a x$	$x > 0$	$\log_3 \sqrt{27} = (1/2) \cdot 3 = 1,5$
$k \cdot \log_a x = \log_a x^k$	$x > 0$	$2 \cdot \log_5 10 - \log_5 4 = \log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 25 = 2$

Формулы работают в обе стороны. В вычислениях их обычно применяют справа налево: сумму логарифмов сворачивают в логарифм произведения, чтобы под знаком логарифма оказалась точная степень основания.

Отдельная оговорка про чётную степень. Если x может быть отрицательным, то $\log_a x^2$ равно $2 \cdot \log_a$ от модуля x , а не $2 \cdot \log_a x$. Выражение $\log_3 x^2$ определено при всех x , кроме нуля, а $2 \cdot \log_3 x$ — только при положительных x . Замена одного на другое в уравнении теряет корни.

Переход к новому основанию

Формула	Условия	Пример с вычислением
$\log_a b = \log_c b / \log_c a$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$	$\lg 64 / \lg 4 = \log_4 64 = 3$
$\log_a b = 1 / \log_b a$	$a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$	$\log_2 5 \cdot \log_5 2 = 1$
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$	$a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, c > 0$	$\log_3 5 \cdot \log_5 9 = \log_3 9 = 2$
$\log_{(a^k)} b = (1/k) \cdot \log_a b$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, k \neq 0$	$\log_4 32 = (1/2) \cdot \log_2 32 = 5/2 = 2,5$
$\log_{(a^m)} b^n = (n/m) \cdot \log_a b$	те же, $m \neq 0$	$\log_9 27 = \log_{(3^2)} 3^3 = (3/2) \cdot 1 = 1,5$
a в степени $\log_b c$ равно c в степени $\log_b a$	$a > 0, c > 0, b > 0, b \neq 1$	$4^{(\log_2 3)} = 3^{(\log_2 4)} = 3^2 = 9$

Переход к новому основанию нужен, когда в выражении встретились логарифмы с разными основаниями. Удобное новое основание — то, степенями которого являются все числа в задаче: для 4, 8, 16 и 32 это 2, для 9, 27 и 81 это 3.

Частные случаи

Формула	Условия	Пример с вычислением
$\log_a 1 = 0$	$a > 0, a \neq 1$	$\log_{17} 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$a > 0, a \neq 1$	$\ln e = 1, \lg 10 = 1$
$\log_a (1/a) = -1$	$a > 0, a \neq 1$	$\log_5 0,2 = \log_5 (1/5) = -1$
$\lg 10^n = n$	n — любое число	$\lg 10\,000 = 4$
$\log_{1/a} b = -\log_a b$	$a > 0, a \neq 1, b > 0$	$\log_{1/2} 8 = -\log_2 8 = -3$
$\log_a (1/b) = -\log_a b$	$a > 0, a \neq 1, b > 0$	$\log_3 (1/9) = -2$

Монотонность и неравенства

Формула	Условия	Пример с вычислением
При $a > 1$ из $\log_a x_1 < \log_a x_2$ следует $0 < x_1 < x_2$	функция возрастает	$\log_2 x < 3$ при $0 < x < 8$
При $0 < a < 1$ из $\log_a x_1 < \log_a x_2$ следует $x_1 > x_2 > 0$	функция убывает, знак меняется	$\log_{1/2} x < -1$ при $x > 2$
$\log_a b > 0$, если a и b оба больше 1 или оба между 0 и 1	$a > 0, a \neq 1, b > 0$	$\log_{0,5} 0,2 > 0$
$\log_a b < 0$, если одно из чисел больше 1, а другое между 0 и 1	те же	$\log_{0,5} 3 < 0$
Знак $\log_a b$ совпадает со знаком $(a - 1)(b - 1)$	те же	$\log_7 0,5: (7 - 1)(0,5 - 1) < 0$, логарифм отрицателен
Знак $\log_a f - \log_a g$ совпадает со знаком $(a - 1)(f - g)$	$f > 0, g > 0, a > 0, a \neq 1$	метод рационализации для неравенств с переменным основанием
Оценка между степенями	$a^n < b < a^{n+1}$ при $a > 1$ даёт $n < \log_a b < n + 1$	$9 < 10 < 27$, значит $\log_3 10$ лежит между 2 и 3

Главное правило неравенств: при основании больше единицы знак неравенства между аргументами сохраняется, при основании меньше единицы — меняется на противоположный. Это следует из того, возрастает функция $y = \log_a x$ или убывает.

Как решать уравнения с логарифмами?

Каждое решение начинается с области допустимых значений. Её выписывают до преобразований, а найденные корни проверяют именно по ней.

- $\log_3 (2x - 1) = 2$.** ОДЗ: $2x - 1 > 0$, то есть $x > 0,5$. По определению $2x - 1 = 3^2 = 9$, откуда $x = 5$. Корень входит в ОДЗ. Ответ: 5.
- $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$.** ОДЗ: $x > 1$. Сумма логарифмов равна $\log_2 ((x + 1)(x - 1))$, поэтому $x^2 - 1 = 8$, $x^2 = 9$, $x = 3$ или $x = -3$. Корень -3 не входит в ОДЗ: при нём оба логарифма не существуют. Ответ: 3.
- $\log_5 (x^2 - 4x) = \log_5 (2x - 5)$.** Приравниваем аргументы: $x^2 - 4x = 2x - 5$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x = 1$ или $x = 5$. Проверка: при $x = 1$ аргумент $2x - 5 = -3$, логарифм не существует. При $x = 5$ оба аргумента равны 5. Ответ: 5.

4. $\log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x + 2 = 0$. ОДЗ: $x > 0$. Замена $t = \log_2 x$ даёт $t^2 - 3t + 2 = 0$, $t = 1$ или $t = 2$. Отсюда $x = 2$ или $x = 4$, оба положительны. Ответ: 2 и 4.
5. $\log_3 x^2 = 2$. ОДЗ: $x \neq 0$. По определению $x^2 = 9$, $x = 3$ или $x = -3$, оба корня подходят. Если сначала написать $2 \cdot \log_3 x = 2$, получится только $x = 3$: корень -3 потерян.
6. $\log_x (2x + 3) = 2$. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. По определению $x^2 = 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = 3$ или $x = -1$. Отрицательное основание запрещено. Проверка: $\log_3 9 = 2$. Ответ: 3.

Неравенства с логарифмами: разбор

1. $\log_2 (x - 3) < 2$. ОДЗ: $x > 3$. Основание 2 больше единицы, знак сохраняется: $x - 3 < 4$, $x < 7$. С учётом ОДЗ ответ: $(3; 7)$.
2. $\log_{(1/3)} (2x - 1) \geq -2$. ОДЗ: $x > 0,5$. Правая часть $-2 = \log_{(1/3)} 9$, потому что $(1/3)^{-2} = 9$. Основание меньше единицы, знак меняется: $2x - 1 \leq 9$, $x \leq 5$. Ответ: $(0,5; 5]$.
3. $\log_2 x + \log_2 (x - 2) \leq 3$. ОДЗ: $x > 2$. Сворачиваем: $x(x - 2) \leq 8$, $x^2 - 2x - 8 \leq 0$, $(x - 4)(x + 2) \leq 0$, то есть $-2 \leq x \leq 4$. Пересечение с ОДЗ: $(2; 4]$.
4. $\log_x (6 - x) \geq 1$. ОДЗ: $0 < x < 6$, $x \neq 1$. Переносим: $\log_x (6 - x) - \log_x x \geq 0$. По методу рационализации знак разности совпадает со знаком $(x - 1)(6 - x - x)$, получаем $(x - 1)(6 - 2x) \geq 0$, то есть $1 \leq x \leq 3$. Без точки $x = 1$ ответ: $(1; 3]$. Проверка: при $x = 4$ выходит $\log_4 2 = 0,5 < 1$, точка исключена верно.

На каких ловушках ОДЗ теряют баллы?

- **Сворачивание суммы расширяет ОДЗ.** $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1)$ требует обоих положительных аргументов, а $\log_2 (x^2 - 1)$ — только их произведения. Отсюда посторонний корень -3 в примере 2.
- **Вынос чётной степени сужает ОДЗ.** $\log_3 x^2$ определён при $x \neq 0$, а $2 \cdot \log_3 x$ — только при $x > 0$. Отсюда потерянный корень -3 в примере 5.
- **Равенство аргументов проверяют в обеих частях.** В уравнении $\log_a f = \log_a g$ из $f = g$ ещё не следует, что корень годится: в примере 3 при $x = 1$ обе части равны -3 , а логарифмов не существует. В найденной точке аргументы совпадают, поэтому достаточно проверить положительность одного из них.
- **Переменное основание — три условия.** Основание положительно, не равно единице, аргумент положителен. Про $x \neq 1$ забывают чаще всего, как в неравенстве 4.
- **Неравенство без ОДЗ даёт лишние промежутки.** В неравенстве 3 квадратное неравенство даёт отрезок от -2 до 4 , но половина его лежит там, где логарифмы не существуют.

Как применять свойства логарифмов на экзамене?

1. Перед вычислением посмотрите на числа под логарифмами и в основаниях: если все они степени одного числа, переходите к этому основанию.
2. В выражениях из задания 8 сворачивайте, а не раскрывайте: цель — получить под логарифмом точную степень основания.
3. В уравнениях первой строкой выписывайте ОДЗ, последней — проверку каждого корня по ней.
4. В неравенствах перед сравнением аргументов посмотрите на основание: больше единицы — знак сохраняется, меньше — меняется.
5. Любую формулу проверяйте на числах: $\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 32 = 5$, а $\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$ — формула записана верно.

Какие ошибки чаще всего делают с логарифмами?

- Раскрывают логарифм суммы: $\log_2 (4 + 4) = 3$, а $\log_2 4 + \log_2 4 = 4$. Формулы для $\log_a (x + y)$ не существует.
- Делят логарифмы как аргументы: $\log_3 81 / \log_3 3 = 4 / 1 = 4$, а не $\log_3 27 = 3$. Отношение логарифмов — это переход к новому основанию, а не логарифм частного.

- Не меняют знак неравенства при основании меньше единицы и получают промежуток, противоположный верному.
- Забывают, что основание и аргумент — разные роли: $\log_2 8 = 3$, но $\log_8 2 = 1/3$.
- Записывают в ответ корень, при котором аргумент или основание логарифма не удовлетворяют ОДЗ.

Источники

- [ФИПИ. Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ](#) — проект спецификации 2027 года по математике профильного уровня: 20 заданий, 235 минут, 33 первичных балла; кодификатор с логарифмами, логарифмической функцией, логарифмическими уравнениями и неравенствами.
- [ФИПИ. Планируемые изменения в КИМ ЕГЭ 2027 года](#) — новая нумерация заданий первой и второй части.
- [ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ](#) — формулировки заданий на уравнения, вычисления и неравенства с логарифмами.



Закрепи в тренажёре

Справочник помогает вспомнить, тренажёр — не забыть. НейроМиша подбирает задания по твоим ошибкам и разбирает каждый ответ. Бесплатно, без карты.

neuromisha.ru/ege/matematika/

neuromisha.ru/app/