



Таблица производных

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = 1/x$ — основа всей таблицы. По проекту ЕГЭ 2027 производная нужна в двух номерах профильной математики: в задании 9 по графику и в новом задании 17 с развёрнутым решением. Дальше — правила для произведения, частного и сложной функции, касательная, экстремумы и разбор задач.



Начала анализа

Математика профиль

Задание 9, 17

Обновлено 22 сентября 2026

В каких заданиях ЕГЭ нужна производная?

По проекту спецификации ЕГЭ 2027 профильная математика — это 20 заданий, 235 минут и 33 первичных балла. Производная нужна в двух номерах. Задание 9 — базового уровня, один балл: функция и производная по графику, экстремумы, касательная, первообразная и площадь через интеграл. Задание 17 — новое задание второй части с развёрнутым решением, до двух баллов: реальную ситуацию нужно описать функцией и исследовать её средствами начал анализа.

В 2026 году производная проверялась в заданиях 8 и 12: по графику и через поиск точки экстремума или наибольшего значения по формуле. В проекте 2027 года задание 17 собрано из тем прежних заданий 9 и 12, поэтому вычислять производную по формуле по-прежнему нужно, только теперь с обоснованием.

Проект спецификации обсуждается до 30 сентября 2026 года, нумерация ещё может уточниться. Таблица и правила от этого не зависят.

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная	Пример
С (постоянная)	0	$(7)' = 0$, $(\pi^2)' = 0$
x	1	$(x)' = 1$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$(x^5)' = 5x^4$; при $x = 2$ это $5 \cdot 16 = 80$
$x^{-n} = 1/x^n$	$-n \cdot x^{-n-1}$	$(x^{-3})' = -3x^{-4} = -3/x^4$
$1/x$	$-1/x^2$	в точке $x = 2$ производная равна $-1/4 = -0,25$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$, $x > 0$	в точке $x = 4$ производная равна $1/(2 \cdot 2) = 0,25$
$x^{(3/2)} = x\sqrt{x}$	$(3/2) \cdot \sqrt{x}$	в точке $x = 9$ производная равна $1,5 \cdot 3 = 4,5$
e^x	e^x	в точке $x = 0$ производная равна $e^0 = 1$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$
$\ln x$	$1/x$, $x > 0$	в точке $x = 5$ производная равна $1/5 = 0,2$
$\log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$, $x > 0$	$(\log_3 x)' = 1/(x \cdot \ln 3)$
$\sin x$	$\cos x$	в точке $x = 0$ производная равна $\cos 0 = 1$
$\cos x$	$-\sin x$	в точке $x = \pi/2$ производная равна $-\sin(\pi/2) = -1$

Функция	Производная	Пример
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	в точке $x = 0$ производная равна $1/1 = 1$
$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$	в точке $x = \pi/2$ производная равна $-1/1 = -1$

Первые строки таблицы — это одна формула для степени: константа, x , корень и дробь $1/x$ получаются из $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ при $n = 0, 1, 1/2$ и -1 . Запоминать их отдельно не обязательно, но на экзамене быстрее узнавать сразу.

Правила дифференцирования

Правило	Формула	Пример
Сумма и разность	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(x^3 - 2x + 5)' = 3x^2 - 2$
Постоянный множитель	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$	$(4 \sin x)' = 4 \cos x$
Произведение	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(x \cdot e^x)' = e^x + x \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x$
Произведение	то же	$(x^2 \cdot \sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$
Частное	$(u / v)' = (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2, v \neq 0$	$(x / (x + 1))' = ((x + 1) - x) / (x + 1)^2 = 1 / (x + 1)^2$
Частное	то же	$((x^2 + 1) / x)' = (2x \cdot x - (x^2 + 1)) / x^2 = (x^2 - 1) / x^2$
Сложная функция	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$((3x - 1)^4)' = 4(3x - 1)^3 \cdot 3 = 12(3x - 1)^3$
Сложная функция	то же	$(e^{(2x)})' = 2e^{(2x)}$
Сложная функция	то же	$(\ln(x^2 + 1))' = 2x / (x^2 + 1)$
Сложная функция	то же	$(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$
Сложная функция	то же	$(\sqrt{2x + 1})' = 2 / (2\sqrt{2x + 1}) = 1 / \sqrt{2x + 1}$
Линейный аргумент	$(f(kx + b))' = k \cdot f'(kx + b)$	$(\cos(5x - 2))' = -5 \sin(5x - 2)$

Проверка значения в точке: для $f(x) = x^3 - 2x$ производная $f'(x) = 3x^2 - 2$, и $f'(2) = 3 \cdot 4 - 2 = 10$. Для $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$ производная $f'(x) = e^x + (x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x$, и $f'(0) = 0$.

Сложную функцию дифференцируют снаружи внутрь: сначала производная внешней функции, аргумент при этом не трогают, потом множитель — производная того, что стояло внутри. Если внутри линейное выражение $kx + b$, множитель равен просто k .

Геометрический смысл

Факт	Формула	Пример
Производная в точке — угловой коэффициент касательной	$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$	касательная к $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$ имеет $k = 2 \cdot 3 = 6$
Уравнение касательной	$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	для $y = x^2$ при $x_0 = 3$: $y = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9$
Касательная параллельна прямой $y = kx + b$	$f'(x_0) = k$	для $f(x) = x^2 - 2x$ и прямой $y = 4x + 7$: $2x_0 - 2 = 4$, $x_0 = 3$
Касательная параллельна оси абсцисс	$f'(x_0) = 0$	для $f(x) = x^2 - 6x$ это $x_0 = 3$

Факт	Формула	Пример
Угол наклона касательной 45°	$f'(x_0) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$	для $f(x) = x^2$ это $x_0 = 0,5$
Угол наклона касательной 135°	$f'(x_0) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$	для $f(x) = x^2$ это $x_0 = -0,5$
Касательная на рисунке	$k = (\text{разность ординат}) / (\text{разность абсцисс})$ двух точек прямой	прямая проходит через (1; 2) и (3; 8): $k = 6 / 2 = 3$

Если касательная на рисунке идёт вниз слева направо, производная отрицательна, и знак минус нельзя потерять при подсчёте по клеткам.

Физический смысл

Факт	Формула	Пример
Скорость — производная координаты	$v(t) = x'(t)$	$x(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$, $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$, $v(2) = 12 - 12 + 5 = 5 \text{ м/с}$
Ускорение — производная скорости	$a(t) = v'(t) = x''(t)$	$a(t) = 6t - 6$, $a(2) = 6 \text{ м/с}^2$
Момент, когда скорость задана	решить $v(t) = \text{число}$	$3t^2 - 6t + 5 = 14$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t = 3 \text{ с}$
Остановка точки	$v(t) = 0$	$x(t) = t^2 - 8t$: $v(t) = 2t - 8 = 0$ при $t = 4 \text{ с}$
Мгновенная скорость изменения любой величины	производная этой величины по времени	объём $V(t) = 2t^2 + t$, скорость наполнения $V'(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$

Отрицательный корень в задаче о движении отбрасывают: время отсчитывают от начала наблюдения. В примере с $t^2 - 2t - 3 = 0$ второй корень $t = -1$ не подходит.

Монотонность и экстремумы

Факт	Условие	Пример
Функция возрастает	$f'(x) > 0$ на промежутке	$y = x^3 + x$: $y' = 3x^2 + 1 > 0$ при всех x
Функция убывает	$f'(x) < 0$ на промежутке	$y = -2x + \ln 2$: $y' = -2 < 0$
Критическая точка	$f'(x_0) = 0$ или производная не существует	$y = x^2 - 4x$: $y' = 2x - 4 = 0$ при $x = 2$
Точка максимума	f' меняет знак с плюса на минус	$y = -x^2 + 6x$: $y' = -2x + 6$, знак меняется с + на - в $x = 3$
Точка минимума	f' меняет знак с минуса на плюс	$y = x^2 - 4x$: минимум в $x = 2$
Ноль производной без смены знака — не экстремум	f' не меняет знак	$y = x^3$: $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но функция возрастает всюду
Наибольшее и наименьшее на отрезке	сравнить значения в критических точках внутри отрезка и на концах	см. разбор ниже

Точка экстремума — это значение x , а экстремум функции — значение y в этой точке. На экзамене спрашивают то одно, то другое, и путаница здесь стоит балла.

Исследование функции: разбор

1. Найдите точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$. Производная $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, нули $x = -1$ и $x = 3$. Знаки: при $x < -1$ производная положительна, между -1 и 3 отрицательна, при $x > 3$ снова положительна. Значит, $x = -1$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. Значения: $y(-1) = -1 - 3 + 9 + 4 = 9$, $y(3) = 27 - 27 - 27 + 4 = -23$.
2. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 8 \ln x + 1$. Область определения $x > 0$. Производная $y' = 2x - 8/x = 2(x^2 - 4)/x$. На области определения нуль один: $x = 2$. Слева от 2 производная отрицательна (при $x = 1$ она равна -6), справа положительна (при $x = 4$ она равна 6). Ответ: 2.
3. Найдите точку минимума функции $y = (x - 2) \cdot e^x$. По правилу произведения $y' = e^x + (x - 2) \cdot e^x = (x - 1) \cdot e^x$. Множитель e^x всегда положителен, поэтому знак определяет $x - 1$: минус слева от 1, плюс справа. Ответ: 1.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 2]$. Производная $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, внутри отрезка нуль только $x = 1$. Значения: $y(0) = 0$, $y(1) = 1 - 3 = -2$, $y(2) = 8 - 6 = 2$. Наибольшее значение 2, наименьшее -2 .
5. **Модель: участок у стены.** Прямоугольный участок примыкает к стене, с трёх других сторон его огораживают забором длиной 40 м. Сторону, перпендикулярную стене, обозначим x , тогда сторона вдоль стены $40 - 2x$, а x меняется от 0 до 20. Площадь $S(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$, производная $S'(x) = 40 - 4x$ равна нулю при $x = 10$. Слева от 10 производная положительна, справа отрицательна, это максимум. Наибольшая площадь $S(10) = 10 \cdot 20 = 200$ м². Так устроено решение задания 17: переменная с границами, функция, производная, знаки и ответ в единицах условия.

Как читать графики в задании 9?

- Если нарисован график производной, точки экстремума функции — это места, где график производной пересекает ось абсцисс: сверху вниз — максимум, снизу вверх — минимум.
- Функция возрастает там, где график производной выше оси, и убывает там, где ниже. Касание оси без перехода на другую сторону экстремума не даёт.
- Если нарисован график самой функции, производная положительна на участках подъёма, отрицательна на участках спуска и равна нулю в вершинах.
- Значение производной по касательной на рисунке ищут как отношение приращений: выберите две точки прямой в узлах клеток и разделите разность ординат на разность абсцисс.

С чего начинать, когда нужно найти производную?

1. Перед дифференцированием упростите: раскройте скобки, запишите корень и дробь как степень. $(x^2 + 1)/x$ проще продифференцировать как $x + x^{-1}$.
2. Определите последнее действие в формуле: сумма, произведение, частное или функция от функции. Это и есть правило, с которого начинают.
3. В задачах на экстремум всегда проверяйте смену знака производной, а не только её нуль.
4. На отрезке сравнивайте значения во всех критических точках внутри и на обоих концах: наибольшее значение может оказаться на границе.
5. Проверьте себя числом: подставьте $x = 1$ или $x = 0$ в ответ и в производную, полученную другим способом.

Какие ошибки чаще всего делают с производной?

- Считают производную произведения как произведение производных: $(x \cdot e^x)'$ не равно $1 \cdot e^x$, правильно $(x + 1) \cdot e^x$.
- Забывают множитель внутренней функции: $(\sin 3x)'$ = $3 \cos 3x$, а не $\cos 3x$.
- Путают знак у косинуса: $(\cos x)'$ = $-\sin x$, а $(\sin x)'$ = $\cos x$ без минуса.

- Ищут экстремумы функции по её собственному графику так, как по графику производной, и наоборот.
- Записывают в ответ значение функции вместо точки экстремума или точку вместо наибольшего значения.

Источники

- [ФИПИ. Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ](#) — проект спецификации 2027 года по математике профильного уровня: 20 заданий, 235 минут, 33 первичных балла; кодификатор с производной, её геометрическим и физическим смыслом и применением к исследованию функций.
- [ФИПИ. Планируемые изменения в КИМ ЕГЭ 2027 года](#) — новая нумерация заданий и появление задания на моделирование с началами анализа.
- [ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ](#) — формулировки заданий на производную, касательную и экстремумы.



Закрепи в тренажёре

Справочник помогает вспомнить, тренажёр — не забыть. НейроМиша подбирает задания по твоим ошибкам и разбирает каждый ответ. Бесплатно, без карты.

neuromisha.ru/ege/matematika/

neuromisha.ru/app/