

Формулы корней тригонометрических уравнений

Уравнение	Корни	Условие
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$ a \leq 1$; то же: $x = \arcsin a + 2\pi n$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$
$\sin x = 0$	$x = \pi n$	частный случай
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	частный случай
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	частный случай
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$ a \leq 1$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	частный случай
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$	частный случай
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$	частный случай
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	любое a
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi n$	частный случай
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	любое a
$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	частный случай
$\sin x = a$ или $\cos x = a, a > 1$	корней нет	синус и косинус лежат от -1 до 1

Везде n — любое целое число, $n \in \mathbb{Z}$. Значения $\arcsin$, $\arccos$ и arctg — на странице обратные тригонометрические функции.

Готовые ответы для табличных значений

Уравнение	Корни одной формулой	Две серии
$\sin x = \frac{1}{2}$	$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\cos x = \frac{1}{2}$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	—
$\operatorname{tg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	—
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$	—
$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$	—

Запись двумя сериями удобнее для отбора корней на отрезке: каждую серию перебирают по n отдельно.

Типы тригонометрических уравнений и как их решать

Тип	Пример	Что делать
квадратное относительно функции	$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	замена $t = \sin x, t \leq 1$: $t = 1$ или $t = -\frac{1}{2}$

Тип	Пример	Что делать
сводится к одной функции	$2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, дальше как квадратное
однородное первой степени	$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$	разделить на $\cos x \neq 0$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
однородное второй степени	$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$	разделить на $\cos^2 x$: $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$
разложение на множители	$\sin 2x = \cos x$	$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$, $\cos x(2 \sin x - 1) = 0$
с двойным углом	$\cos 2x + \sin x = 0$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ — квадратное относительно $\sin x$
с вспомогательным углом	$\sin x + \cos x = 1$	$\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

Делить обе части на функцию можно, только если она не равна нулю при корнях уравнения. В однородном уравнении $\cos x = 0$ не даёт корней — проверьте подстановкой. Формулы двойного угла и понижения степени — в тригонометрических формулах.

Закрепи в тренажёре

Где это на ЕГЭ: задание 14 по профильной математике. Уравнение с отбором корней — задания с проверкой, без регистрации.

Решать задание 14 на neuromisha.ru



Наведи камеру телефона